

**Das RFDZ Mathematik Wien lädt alle interessierten AHS- und BHS-  
Mathematiklehrkräfte ein zum**

## ISTRON-Lehrer(innen)fortbildungstag: Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht


**ISTRON**

„ISTRON“ ist eine Vereinigung von Mathematikdidaktikern und Lehrkräften, die sich insbesondere dem **realitätsbezogenen Mathematikunterricht** und der **Anwendungsorientierung** verschrieben hat. Im Rahmen des **RFDZ-Mathematik Wien** ist es uns gelungen, diese Gruppe zu gewinnen in Wien einen Lehrer(innen)fortbildungstag abzuhalten.

**Datum: FR, 06. 11. 2009, 09.00 bis 17.15 Uhr**

**Veranstaltungsort:** Fakultät für Mathematik der Universität Wien  
Universitätszentrum (UZA 2 und UZA 4) 1090 Wien  
Zugang über Nordbergstraße 15 oder Althanstraße 14

**öffentliche Verkehrsmittel:** U4-Station Friedensbrücke (Fußweg ca. 5 min)  
U6-Station Spittelau (Fußweg ca. 10 min)  
Straßenbahnlinie D, Station Althanstraße (Stiegen neben dem Postamt zum UZA)

### Programm

**UZA 2, Hörsaal 3**

09.00 – 09.15	Eröffnung und Begrüßung
09.15 – 10.15 Plenarvortrag	<b>Prof. Dr. Regina Bruder (TU Darmstadt):</b> Verpackungsoptimierung – ein Thema für einen langfristigen Kompetenzaufbau im mathematischen Modellieren
10.15 – 10.45	Kaffeepause
10.45 – 11.45 Plenarvortrag	<b>Prof. Dr. H.-W. Henn (TU Dortmund):</b> Meinen Bogen setze ich in die Wolken

**Mittagspause: 11.45 – 13.00**

**Workshopschiene 1: 13.00 – 14.30**

UZA 2: 2A 310	UZA 4: C 2.09	UZA 4: C 2.07	UZA 4: C 2.03 (PC-Raum)	UZA 4: C 2.04 (PC-Raum)
<b>Prof. Dr. B. Lutz-Westphal (U Vechta):</b> Optimale Wege – Moderne Mathematik im Unterricht	<b>Prof. Dr. K. Maaß (PH Freiburg):</b> Modellierungsaufgaben in Klassenarbeiten – gerechte Bewertung (un)möglich?	<b>S. Meier; C. Liedmann (TU Dortmund):</b> Realitätsnähe im Mathematikunterricht im europäischen Kontext entwickelt und ausprobiert – Aufgaben und Erfahrungen aus einem Comenius-Netzwerk	<b>Prof. Dr. G. Greefrath (U Köln):</b> Unschärfe Aufgaben – selbst herstellen!	<b>Ch. Höger; S. Göttge (Moll Gymnasium Mannheim):</b> Binnendifferenzierung im Mathematikunterricht

**14.30 – 14.45 Kaffeepause**

**Sektionsvorträge: 14.45 – 15.30**

UZA 2: HS 3	UZA 2: 2A 310	UZA 4: C 2.09	UZA 4: C 2.07	UZA 4: D 1.01	UZA 4: D 1.03
<b>Prof. Dr. G. Kaiser; B. Schwarz (U Hamburg):</b> Modellierung von komplexen authentischen Problemen mit Schüler(innen) – geht das überhaupt? – Erfahrungen aus einem hoffnungsvoll stimmenden Projekt	<b>Dr. R. Borromeo Ferri (U Hamburg):</b> Lehrerkompetenzen zum Unterrichten von mathematischer Modellierung	<b>Dr. H.-S. Siller (U Salzburg); Prof. Dr. J. Maaß (U Linz):</b> Die Mathematik im Ei	<b>B. Girnath (U Münster):</b> Pascals stochastisches Argument für den Katholizismus	<b>Prof. Dr. H. Henning (U Magdeburg):</b> Probleme zwischen Himmel und Erde – Modellbildung überall	<b>Dr. W. Eid (U Magdeburg):</b> Kompetenzentwicklung in Prüfungsaufgaben

**15.30 – 15.45 Kaffeepause**

**Workshopschiene 2: 15.45 – 17.15**

UZA 2: 2A 310	UZA 4: C 2.09	UZA 4: C 2.07	UZA 4: D 1.01	UZA 4: C 2.04 (PC-Raum)
<b>S. Schukajlow (U Kassel):</b> Selbstständigkeitsorientierter Unterricht mit Modellierungsaufgaben	<b>M. Marxer (PH Schwäbisch Gmünd):</b> Normative Modelle – mit Mathematik Realität(en) gestalten	<b>Dr. B. Leneke (U Magdeburg):</b> Aufgaben variieren – produktiv Mathematik erfinden und erleben	<b>Prof. Dr. H. Henning (U Magdeburg):</b> Ist Schönheit messbar? – Mathematik und Kunst	<b>Prof. Dr. R. Oldenburg (U Frankfurt):</b> Bilder und Mathematik

**Verlagspräsentationen und Stärkung während der Kaffeepausen in der Aula des UZA 2**

Bitte inskribieren Sie die Veranstaltung nach Möglichkeit an der PH Wien ([www.phwien.ac.at](http://www.phwien.ac.at)), Veranstaltungsnummer: **9102257006** oder schreiben Sie zur Anmeldung eine Email unter Angabe Ihres Namens und Ihrer Schule an: **[petra.hauer-typelt@univie.ac.at](mailto:petra.hauer-typelt@univie.ac.at)**

## Kurzbeschreibung der Vorträge/Workshops

### Plenarvorträge

#### **Bruder, Regina:**

##### **Verpackungsoptimierung – ein Thema für einen langfristigen Kompetenzaufbau im mathematischen Modellieren**

Verpackungen bieten ein großes Modellierungspotenzial und es existiert eine Vielfalt an Formen und Aspekten, welche die Art der Verpackung beeinflussen, z.B. bei Süßwarenverpackungen. Im Vortrag werden mathematisch bearbeitbare Fragestellungen auf unterschiedlichen Niveaus aus dem Verpackungsbereich für verschiedene Klassenstufen mit der Brille des langfristigen Kompetenzaufbaus im mathematischen Modellieren betrachtet. Auch der reale Hintergrund dieses Themas mit aktuellen Verpackungsverordnungen und Materialverwertungsaspekten (grüner Punkt) soll diskutiert werden.

#### **Henn, Hans-Wolfgang: Meinen Bogen setze ich in die Wolken**

Die wunderschöne Erscheinung des Regenbogens, auf den das Bibelzitat der Titelzeile hinweist, wird in vielen Mythen und Märchen beschrieben. Die Erstellung eines mathematischen Modells für die Entstehung des Regenbogens ist ein sehr gutes Beispiel für den Modellkreislauf von der realen Situation zum Realmodell, Mathematisierung, Arbeit am mathematischen Modell mit Hilfe einer dynamischen Geometriesoftware, Rückübersetzung in die Realität mit Vorhersage für die zur Diskussion stehende Situation und die Validierung des Modells durch das „experimentum crucis“.

### Workshopschiene 1

#### **Greerath, Gilbert: Unscharfe Aufgaben – selbst herstellen!**

Im Workshop wird eine spezielle Art offener Aufgaben vorgestellt, die den Unterricht besonders bereichern kann. Solche Aufgaben bestehen aus der Kombination von Frage und Foto. Es wird gezeigt, wie derartige Aufgaben auf einfache Weise für den Unterricht mit Hilfe des Internets selbst hergestellt werden können. Beispiele für solche Aufgaben werden diskutiert und klassifiziert.

#### **Höger, Christof; Göttge, Silke: Binnendifferenzierung im Mathematikunterricht**

Nach einem Impulsreferat zu fundamentalen Ideen des Mathematikunterrichts und zur Binnendifferenzierung werden die Teilnehmerinnen und Teilnehmer des Workshops zu je einem Unterrichts-Thema der Unter-, Mittel- und Oberstufe anhand von vorhandenen Materialien aus aktuellen Schulbüchern sowie dem COMENIUS-Projekt "Developing Quality in Mathematics Education" Aufgaben-Sequenzen zur Binnendifferenzierung entwickeln. Diese werden anschließend vorgestellt und diskutiert.

#### **Lutz-Westphal, Brigitte: Optimale Wege – Moderne Mathematik im Unterricht**

Die Optimierung von Wegen spielt nicht nur im Alltag eine wichtige Rolle, sondern auch in der Mathematik. Routenplaner und Navigationssysteme basieren auf recht einfach verständlichen mathematischen Grundlagen, die sich Schüler(innen) der Mittel- und Oberstufe in einem projektartigen Unterricht selbst erarbeiten können. In diesem Workshop wird eine mögliche Unterrichtseinheit mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern gemeinsam erarbeitet. Es werden Unterrichtsmaterialien zur Verfügung gestellt und konkrete Hinweise zur Unterrichtsmethodik gegeben.

#### **Maaß, Katja: Modellierungsaufgaben in Klassenarbeiten – gerechte Bewertung (un)möglich?**

Die Integration von Realitätsbezug und Modellierungen in den Mathematikunterricht wird vielfach gefordert. Doch wie sieht die Leistungsbewertung bei Modellierungsaufgaben aus? Kann man Modellierungsaufgaben auch in Klassenarbeiten integrieren? Wie können Klassenarbeiten konkret aussehen? Und vor allem, wie können Schülerlösungen zu derartigen Aufgaben bewertet werden? Die Vielzahl möglicher Lösungen sowie die Vielzahl möglicher Fehler lässt herkömmliche Bewertungsverfahren eventuell als ungeeignet erscheinen. Im Workshop sollen ganz kurz wichtige Grundlagen sowie Beispiele für Klassenarbeiten vorgestellt werden, anschließend erhalten die Teilnehmer Gelegenheit, selbst Schülertexte zu Modellierungsaufgaben anzusehen und zu bewerten.

#### **Meier, Stefanie; Liedmann, Céline: Realitätsnähe im Mathematikunterricht im europäischen Kontext entwickelt und ausprobiert – Aufgaben und Erfahrungen aus einem Comenius-Netzwerk**

Ein Schwerpunkt unseres Comenius-Netzwerk-Projektes „Developing Quality in Mathematics Education II“, an dem Lehrpersonen, Lehrerfortbildner und Wissenschaftler aus elf europäischen Ländern beteiligt sind, ist es, realitätsnahe Aufgaben zu entwickeln, zu testen, ggf. zu modifizieren und der breiten Öffentlichkeit, möglichst mit Erfahrungsberichten versehen, zur Verfügung zu stellen. In diesem Workshop werden die Teilnehmer und Teilnehmerinnen einige dieser Materialien inklusive Erfahrungsberichten kennenlernen. Weiterhin werden Aufgaben selber bearbeitet und für den Einsatz im eigenen Unterricht modifiziert.

### Sektionsvorträge

#### **Borromeo Ferri, Rita: Lehrerkompetenzen zum Unterrichten von mathematischer Modellierung**

Mittlerweile ist durch viele empirische Studien belegt, dass mathematische Modellierung im Unterricht die Lernenden vielfältig in ihrem Lernen und Verstehen von Mathematik fördern kann und teilweise zur Veränderung des Mathematikbildes beiträgt. Das Unterrichten von mathematischer Modellierung fordert von den Lehrpersonen einige Kompetenzen und zusätzliches Wissen in diesem Bereich. Bisher gibt es keinen festgelegten „Kompetenzkatalog“ für Lehrerinnen und Lehrer, aus dem hervorgeht, was eine Lehrperson können und wissen sollte, um mathematische Modellierung im Unterricht erfolgreich und effizient zu unterrichten. Anhand von Unterrichtsbeispielen werden im Vortrag zentrale Lehrerkompetenzen zum Unterrichten von mathematischer Modellierung dargestellt.

#### **Eid, Wolfram: Kompetenzentwicklung in Prüfungsaufgaben**

Die KMK der Bundesrepublik Deutschland hat mit den Bildungsstandards für den mittleren Bildungsabschluss das Kompetenzspektrum anzustrebenden mathematischen Könnens für Lernende der Sekundarschulen umschrieben. Aufbauend auf diesem sind die mathematischen Kompetenzen der Lernenden in weiterführenden Bildungseinrichtungen weiter auszuformen. Im Vortrag sollen zum einen Gedanken entwickelt werden, wie die Fortschreibung dieses Bemühens Gestalt annehmen kann. Zum anderen soll anhand ausgewählter Beispiele verdeutlicht werden, wie die Vielfalt zu berücksichtigender Aspekte bei der Gestaltung einer prüfungsrelevanten bzw. auch prüfungsnahen Aufgabe ausgewogen Berücksichtigung finden kann.

#### **Girnat, Boris: Pascals stochastisches Argument für den Katholizismus**

Blaise Pascal war nicht nur ein bedeutender Mathematiker, sondern auch ein tiefreligiöser Mensch. Er benutzte stochastische Überlegungen, um ein Argument für den Katholizismus zu entwickeln. An diesem historisch interessanten Fall lässt sich zeigen, wie Schüler(innen) gerade bei so einem "unmathematischen" Thema den Modellbildungskreislauf benutzen können, um eine Argumentation nicht einfach aus einem Gefühl heraus anzunehmen oder abzulehnen, sondern um sie in ihre Schritte zu zerlegen und an den einzelnen Stellen gezielt zustimmende oder ablehnende Kritik zu üben.

### **Henning, Herbert: Probleme zwischen Himmel und Erde – Modellbildung überall**

Im Alltag „zwischen Himmel und Erde“ gibt es viele Sachsituationen, die Problemlösen als mathematische Kompetenz erforderlich machen und Problemlösefähigkeiten entwickeln. Fähigkeiten zur mathematischen Modellbildung sind als Kompetenz das „Herzstück“ des Problemlösens und können über Niveaustufen mit entsprechenden Modellierungsaufgaben herausgebildet werden. Dabei sind Funktionen nahezu universelle Mathematisierungsmuster für Anwendungen aus Natur und Technik. Modellierungsfähigkeiten entwickeln sich schrittweise über entsprechende Niveaustufen differenzierte Problemaufgaben. Anhand von Beispielen zu linearen und quadratischen Funktionen werden Möglichkeiten dazu aufgezeigt.

### **Kaiser, Gabriele; Schwarz, Björn: Modellierung von komplexen authentischen Problemen mit Schüler(inne)n – geht das überhaupt? – Erfahrungen aus einem hoffnungsvoll stimmenden Projekt**

Im Vortrag werden Erfahrungen und Ergebnisse einer Modellierungswoche beschrieben, die im März 2009 an der Universität Hamburg als gemeinsames Projekt des Arbeitsbereichs Mathematikdidaktik und des Fachbereichs Mathematik stattgefunden hat und die auf großes öffentliches Interesse gestoßen ist. An der Modellierungswoche haben 370 Schüler(innen) aus Mathematikleistungskursen aus 19 Schulen aus Hamburg und dem Umland teilgenommen und eine Woche ganztägig und unter fachlicher Begleitung durch Mitglieder des Fachbereichs Mathematik und des Arbeitsbereichs Mathematikdidaktik sowie durch studentische Tutoren und Tutorinnen mathematische Modelle für authentische und komplexe Problemstellungen entwickelt. Behandelt wurden Fragen der Chlorierung von Schwimmbädern, der Entwicklung von erkrankten Maikäferpopulationen sowie der optimalen Gartenbewässerung. Im Vortrag werden einerseits die Ergebnisse der Evaluation der Modellierungswoche vorgestellt, aus denen insbesondere die positiven Einschätzungen der Schüler(innen) über das Projekt deutlich werden. Darüber hinaus werden einige der durchgeführten Modellierungsprobleme und von den Schüler(inne)n dazu entwickelte Lösungen beschrieben.

### **Siller, Hans-Stefan; Maaß, Jürgen: Die Mathematik im Ei**

Aus einer umfangreichen Arbeit zur Modellbildung rund um ein Alltagsobjekt, das Ei, tragen wir zwei Zugänge vor, einen empirischen und einen formal-axiomatischen. Empirisch wird versucht, eine Kurve zu finden, die den äußeren Rand eines Eis beschreibt, um das Volumen zu berechnen, das entsteht, wenn diese Kurve um die  $x$ -Achse rotiert. Mit einem Computeralgebrasystem, einigen bewusst gegangenen und hoffentlich lehrreichen Irrwegen ergeben sich letztlich hinreichend gute Näherungen. Der zweite Zugang versucht, an einem für Schüler(innen) mathematisch gut nachvollziehbaren Beispiel deutlich zu machen, wie mathematische Theorie entsteht bzw. entstehen könnte. Durch den Vergleich beider Zugänge können Schüler(innen) ihr Wissen über Mathematik erweitern.

## **Workshopschiene 2**

### **Henning, Herbert: Ist Schönheit messbar? – Mathematik und Kunst**

Kann man mit Mathematik das geheimnisvolle Lächeln der „Mona Lisa“ von Leonardo da Vinci, die Schönheit von Sonnenblumen und das Wachstum von Pflanzen erklären? Der „Goldene Schnitt“ als harmonisches Teilungsverhältnis gilt in der Kulturgeschichte der Mathematik als ein „Maß“ für das Schöne. Man findet den „Goldenen Schnitt“ in Werken berühmter Maler der Renaissance, in Bauwerken der Antike, bei der Erklärung der Planetenbahnen und in der modernen Kunst unserer Zeit. Pythagoras von Samos begründete auf Zahlenverhältnisse seine Musiktheorie („pythagoreische Stimmung“) und Johannes Kepler entdeckte die „Melodie“ der Planeten als Sphärenmusik. Zahlenmystik und Zahlensymbolik findet man bei Johann Sebastian Bach und Alban Berg. In der „seriellen Musik“ des 20. Jahrhunderts findet man Bezüge zu den Fibonaccizahlen ebenso wie zum „Goldenen Schnitt“. Im Vortrag werden Einblicke in 3000 Jahre Kunst- und Kulturgeschichte gegeben und man erfährt, dass Mathematik „eine verborgene arithmetische Übung der Seele“ und Musik die „Mathematik der Gefühle“ sind.

### **Leneke, Brigitte: Aufgaben variieren – produktiv Mathematik erfinden und erleben**

Durch Variation einer Aufgabe oder eines gelösten Problems findet man immer wieder neue Fragen und unerwartete Zusammenhänge. Das Aufgabenvariieren ist also eine Tätigkeit, mit der junge wie ältere Schüler(innen) angeregt werden, selbst mathematische Fragen aufzuwerfen, zu diskutieren, zu bewerten und sie dann natürlich auch zu lösen. Aber wie kommt man auf solche neuen Fragen und mit welchen Methoden können sie gelöst werden? Durch eine bewusste Anwendung von *heuristischen Basisstrategien* können Schüler(innen) stärker an der *Findung und Erzeugung von Aufgaben* beteiligt werden. Für die weitere Arbeit an und mit diesen im Unterricht mittels verschiedener *Variationstechniken* gefundenen und selbst gestellten Aufgaben eröffnen sich dann mehrere didaktisch-methodische Möglichkeiten, die an einigen unterrichtsprobten Beispielen vorgestellt werden. Dabei werden auch Erfahrungen vermittelt, wie man mit der (gewünschten) Offenheit und Vielfalt umgehen kann und welcher Unterrichtsverlauf sich bewährt hat. Aufgaben im Mathematikunterricht von Schüler(inne)n variieren zu lassen, kann Anliegen in jeder Schulstufe und jeder Schulart sein. Diese Methode schafft es in besonderer Weise, allen Schüler(inne)n die Möglichkeiten zu offerieren, sich sowohl bei der „Aufgabenfindung“ als auch beim Lösen (in der Gruppe) und bei der Vorstellung der gefundenen Resultate einzubringen.

### **Marxer, Michael: Normative Modelle – Mit Mathematik Realität(en) gestalten**

Mathematische Modelle werden einerseits herangezogen, um die Realität zu beschreiben (wie naturwissenschaftliche Gesetze), und andererseits, um sie zu gestalten (wie Tarifmodelle). Der Workshop grenzt zunächst die im Mathematikunterricht noch wenig verbreiteten normativen Modelle von den in der Schule stärker thematisierten deskriptiven Modellen ab. Deskriptive Modelle versuchen eine vorhandene Realität mit mathematischen Mitteln adäquat zu beschreiben, die Realität liegt dabei schon vor und ist nicht mehr gestaltbar. Bei normativen Modellierungen dagegen wird die Realität mit Mathematik erst gestaltet, z. B.: Nach welchem Schlüssel teilt man die Heizkosten in einem Mietshaus auf, wie legt man die Kosten für den Hausmeister um und was ist eine gerechte Verteilung für die Renovierungskosten an der Hausfassade? Und wie kann man das in griffigen Formeln mathematisch fassen? Es wird an Aufgaben und zugehörigen Schülerlösungen gezeigt, wie normative Modellierungen im Unterricht Eingang finden können. Der Schwerpunkt liegt dabei auf Algebraisierung (Terme, Funktionen) auf dem Niveau der Sekundarstufe I. Konkrete Aufgabenstellungen aus Wirtschaft, Politik und Technik bieten dann Gelegenheit, die Gestaltungsmöglichkeiten für Realität mithilfe mathematischer Werkzeuge auszuloten.

### **Oldenburg, Reinhard: Bilder und Mathematik**

Im Workshop wird gezeigt, wie mathematische Funktionen genutzt werden können, um Veränderungen von digitalen Bildern zu beschreiben. Java-Applets erlauben dies zu tun, ohne dass die Schüler(innen) viele technische Details lernen müssen. Die verwendete Mathematik ist durchweg schulrelevant, wird aber in einem neuen Kontext angewendet und trägt so zur Vernetzung bei.

### **Schukajlow, Stanislaw: Selbstständigkeitsorientierter Unterricht mit Modellierungsaufgaben**

Im Rahmen des Forschungsprojektes DISUM wurden zwei Formen des Unterrichts mit realitätsbezogenen Aufgaben (selbstständigkeitsorientierte und lehrerzentrierte) für die Jahrgangsstufe 9 entwickelt und empirisch miteinander verglichen. Die selbstständigkeitsorientierte Unterrichtsform hatte bessere Ergebnisse bei Schüler(innen)leistungen und -interesse gebracht. Diese Unterrichtsform wird Teilnehmer(inne)n des Workshops handlungsbezogen vorgestellt und über ihre Vor- und Nachteile wird diskutiert. Weitere Schwerpunkte des Workshops bilden reichhaltige Lerngelegenheiten bei der selbstständigkeitsorientierten Behandlung von Modellierungsaufgaben, wie z.B. Umgang mit Schüler(innen)fehlern.